Was versteht man im logischen Sinne

unter „beweisen", und wie findet man die sogenannten unmittelbaren Wahrheiten,

besonders in Mathematik und Naturwissenschaften?

von

M. Schirmeister.

Wissenschaftliche Abhandlung

zum Programm

des

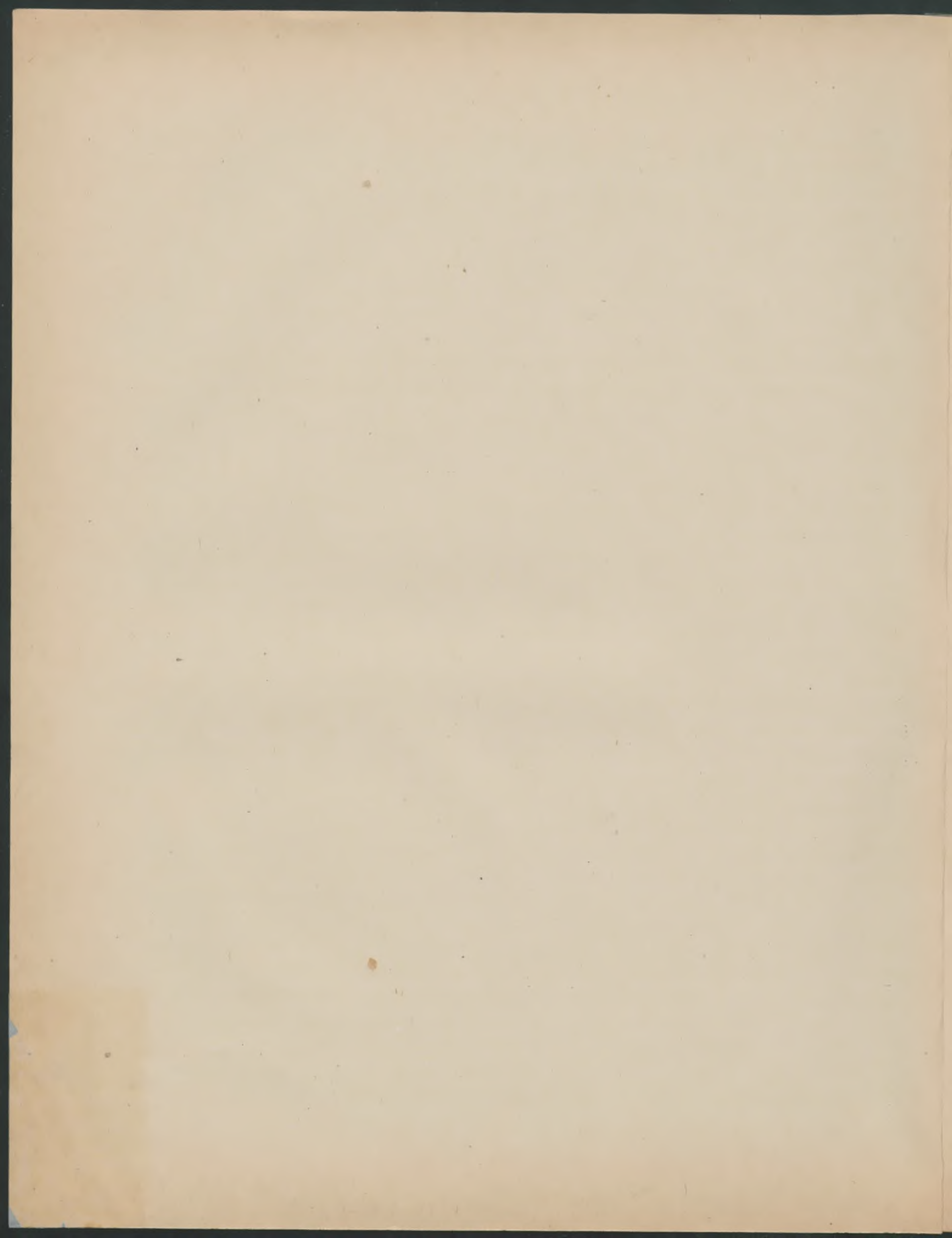
Bugenhagenschen Gymnasiums

zu

Treptow a. R. Ostern 1882.

Treptow a. R. 1882.

Schnellpressen-Druck von Fr. Lehfeldt.



In der nachfolgenden Arbeit soll die Frage beantwortet werden:

Was versteht man im logischen Sinne unter „beweisen“, und wie findet man die sogenannten unmittelbaren Wahrheiten, besonders in Mathematik und Naturwissenschaften?

Zur Begrenzung der Aufgabe ist zunächst erforderlich, die Bedeutung der einzelnen in der Fassung des Themas enthaltenen Begriffe festzustellen und dasjenige namhaft zu machen, was als bekannt vorauszusetzen ist.

Die elementare Logik lehrt, dass man aus zwei Urteilen, den Prämissen, welche gewissen hier nicht zu erörternden Bedingungen genügen, ein neues Urteil, den Schluss, ableiten kann. Als bekannt wird ferner der Begriff der Schlusskette und der „unmittelbaren Folgerungen“ angenommen. Die ganze Denkhandlung, welche aus gewissen Prämissen mit Hülfe von Schlussketten (Folgerungen mit eingerechnet) ein weiteres Urteil herstellt, sei kurz als „schliessen“ resp. Schluss bezeichnet.

Vom (ein- oder mehrfachen) Schluss ist zu unterscheiden der Beweis eines Satzes oder Urteils T. Der Ausdruck „beweisen“ wird im Leben und in einzelnen Wissenschaften, insbesondere auch in einigen Darstellungen der Logik in einer zu allgemeinen Bedeutung gebraucht, einer Bedeutung, deren Zulässigkeit daher hier abzuweisen ist. Die Bestimmung einzelner Thatsachen der äusseren Wirklichkeit ist im logischen Sinne keines Beweises fähig (während man doch im rechtlichen Verfahren von einer Beweisaufnahme spricht, wenn man den Angeklagten einer strafbaren That überführt zu haben glaubt). Ebensowenig sind aus sinnlichen Wahrnehmungen abstrahierte allgemeine Sätze als solche beweisbar; sie sind eben nur Ausdruck der Erfahrung, zu dessen Aufstellung gewisse uns ferner liegende Denkbewegungen nötig sind. In beiden Fällen ist man übrigens auf Wahrscheinlichkeit angewiesen.

Alle menschliche Erkenntniss ist entweder unmittelbare oder mittelbare. Von mittelbar gewonnenen (gültigen resp. wahrscheinlichen) allgemeinen Sätzen fand die eine, eben genannte Gruppe ihre Rechtfertigung in ihrer Eigenschaft als Abstractionen aus der (äusseren) Erfahrung; eine zweite Gruppe findet dieselbe in ihrer Ableitbarkeit durch ein Schlussverfahren aus anderen allgemeinen *) Sätzen, welche sich auch noch als gültige auszuweisen haben. Die Sätze dieser zweiten Gruppe heissen Lehr-

*) Es wird öfter als Beispiel eines inductiven „Beweises“ hingestellt der Schluss: Bei Merkur, Venus etc. hat man durch gewisse Beobachtungen eine Axenrotation gefunden. Merkur, Venus etc. bilden zusammen die vollständige Reihe der alten Planeten. Daher rotieren alle alten Planeten um ihre Axe. — Der Verfasser glaubt einem solchen Schluss die Benennung als „Beweis“ absprechen und ihn etwa als inductiven Schluss bezeichnen zu müssen.

sätze, und nur sie sind zunächst eines Beweises fähig. Zu dem Beweise eines Lehrsatzes T also ist notwendig die Aufstellung derjenigen Prämissen S, welche den gegebenen Satz zum Schlussresultat haben. Gültig wird dann T sein, wenn die Sätze S gültig sind; bewiesen ist aber T nur dann, wenn sie unabhängig von T den Nachweis ihrer Gültigkeit erlangt haben. Die Sätze S würden also, soweit sie Lehrsätze sind, die Ergänzung fernerer Prämissen R verlangen. Bei Fortsetzung dieses Weges kommt man endlich auf solche allgemeinen Sätze, welche nicht wieder aus weiteren allgemeinen Sätzen ableitbar sind, und daher als „oberste Sätze" bezeichnet werden. Dieselben sind entweder allgemeine Sätze aus Erfahrungen, wie die Naturgesetze (mindestens diejenigen, welche der mathematischen Physik als Ausgangspunkte der Deduktion dienen), oder sie sprechen unvermittelt feststehende Thatsachen des Bewusstseins (der Anschauung) aus und sind in Folge dessen eines Beweises weder fähig noch bedürftig. Die obersten Sätze der letzteren Art heissen Grundsätze (Axiome).

Unter den Prämissen eines Beweises befinden sich auch Definitionen. Wenn nun ein Begriff auch vollkommen scharf definiert ist, so ist man auf Grund dieser Definition noch nicht berechtigt, dem Begriffe Gültigkeit zuzuschreiben. Es ist mithin im allgemeinen ein Nachweis (Deduktion) der Gültigkeit dieses Begriffes erforderlich, und wir erweitern den bisher aufgestellten (Beweis von Lehrsätzen) Begriff des Beweises dahin, dass unter ihn auch eine solche Deduktion eines Begriffes fällt.

Aus der Lehre von den Definitionen ist ferner bekannt, wie man mit Zugrundelegung gewisser Begriffe V neue Begriffe W bildet (definiert). Zur Gültigkeit der letzteren ist die der ersteren, ausserdem die genannte Deduktion erforderlich. Jeden der Begriffe V würde man (im allgemeinen) durch andere Begriffe U definieren können. Auch auf diesem Wege führt ein Weitergehen nicht ins Unendliche; man gelangt schiesslich zu nicht eigentlich definierbaren Begriffen, zu Begriffen von unmittelbarer Geltung. Dieselben werden hier im Gegensatze zu abgeleiteten „ursprüngliche Begriffe" genannt. Auch sie sind teils in der Anschauung erzeugt, teils von der äusseren Erfahrung aufgedrängt. Nur die erste Art soll als Grundbegriffe bezeichnet werden.

Es war oben gesagt, dass zunächst nur ein allgemeiner Satz von bestimmter Art (Lehrsatz) eines Beweises fähig sei. Nun ist aber auch bei den sogenannten Aufgaben, auch wenn sie ein singulares Ergebnis liefern und liefern sollen, der Nachweis nötig, dass das Resultat der Auflösung gewissen gegebenen Bedingungen genüge, und auch diesen Nachweis werden wir unter dem allgemeinen Namen „Beweis" begreifen.

Unter „unmittelbaren Wahrheiten" ferner werden wir sowohl Grundsätze als Grundbegriffe und nur diese beiden Gruppen verstehen.

Hiernach ergiebt sich folgende Verteilung des Stoffes:

I. Was versteht man im logischen Sinne unter „beweisen"?

1. Beweis von Lehrsätzen.

2. Deduktion von Begriffen.

3. Rechtfertigung der Lösung von Aufgaben.

II. Wie findet man die unmittelbaren Wahrheiten?

1. Grundbegriffe.

2. Grundsätze (Axiome).

Anm. Im ersten Teile wird der Name „Grundsätze“ öfter statt des allgemeineren „oberste Sätze“ gebraucht, weil es für ihn nicht darauf ankommt, auf welche Weise man zu ihnen gelangt.

I. Was versteht man im logischen Sinne unter „beweisen“?

1) Beweis von Lehrsätzen.

Jeder Lehrsatz T hat den logischen Wert eines hypothetischen Urteiles; d. h. er lässt sich, grammatisch aufgefasst, in der Form eines aus einem Conditional- und einem Hauptsatz zusammengesetzten Satzes aussprechen; wie z. B. der in der gebräuchlichen Form: „Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich“ bekannte Lehrsatz der Geometrie sich auch folgendermassen geben lässt: „Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich sind, so sind deren Gegenwinkel gleich“. Der Inhalt des Bedingungssatzes heisst Hypothesis, der des Hauptsatzes Thesis. Spricht man den Satz T in kategorischer Form aus, so wird die Hypothesis Subject, die Thesis das Prädikat (das gleichschenkelige Dreieck besitzt gleiche Basiswinkel).

Im Folgenden wird nur von der abgekürzten Form des Beweises die Rede sein, der die entwickelte gegenübersteht. Zum Beweise eines Lehrsatzes T war nötig die Aufstellung der Prämissen S, aus denen T sich mit Hülfe eines mehr oder weniger complicierten Schlussverfahrens ergiebt. Die Prämissen S sind im besonderen entweder die einzelnen Teile der Hypothesis oder gewisse Sätze (Urteile) Σ. Die letzteren können ihrer logischen Bedeutung nach oberste Sätze, Lehrsätze und Definitionen sein. Sehen wir in diesem Abschnitt von der mittelbaren Begründung der Begriffe ab, so würde T bewiesen sein wenn die in Σ enthaltenen Lehrsätze von T unabhängig bewiesen wären. Für den Fall, dass das letztere geschehen wäre, würde die Ableitung von T als notwendige Folge der Sätze S (resp. Σ) den abgekürzten Beweis von T repräsentieren. Die sämtlichen Urteile Σ heissen dann die nächsten Beweisgründe von T. Den entwickelten Beweis von T würde man erhalten, wenn man noch jeden in Σ enthaltenen Lehrsatz auf seine nächsten Beweisgründe zurückführte und so fort. Als letzte Beweisgründe jedes Lehrsatzes T ergeben sich dann „oberste Sätze“ und Definitionen.

Die abgekürzte Form des Beweises ist naturgemäss in den überhaupt beweisenden (demonstrativen) Wissenschaften die gebräuchliche, da man im Interesse der Uebersichtlichkeit und Kürze jedes folgenden Beweises, und um die wichtigeren Ergebnisse der Wissenschaft als einen positiven Reinertrag ein für allemal zu besitzen, den Inhalt dieser Ergebnisse besonders zu formulieren pflegt.

Die Beweise teilen wir nach zwei Gesichtspunkten ein. Zuerst kann der Beweis eines Satzes T denselben unmittelbar als notwendige Folge von bereits feststehenden Wahrheiten ableiten: in diesem Falle heisst er ein direkter; oder er kann die Notwendigkeit von T dadurch zeigen, dass er die Unmöglichkeit (Ungültigkeit) des kontradiktorischen Gegenteiles Non - T von T beweist: dann heisst er ein indirekter (apagogischer).

Beim direkten Beweise müssen (wie beim indirekten) sämtliche Teile der Voraussetzung (Hypothesis) als Prämissen der einzelnen Schlüsse verwandt werden, weil man, wenn man einige von ihnen nicht benutzte, einen allgemeineren Satz als den Satz T beweisen oder zu beweisen suchen würde. Das in der Hypothesis enthaltene Einzelne, welches doch stets Repräsentant eines Allgemeinen ist, wird dann

immer unter ein Allgemeines subsumiert, und jedes Mal der aus solcher Subsumption hervorgehende Schluss gezogen. Ein Einzelnes nämlich ist die aus den reellen Zahlen a und b gebildete Summe $(a+b)$, von der man beweisen will, dass $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Sobald die Gesetze der Multiplikation für Summen reeller Zahlen feststehen, folgt der genannte Satz für jeden reellen Wert von a und b, indem diese beiden Zahlen, als beliebig aber bestimmt gedacht, ein Einzelnes gegenüber dem Begriff der reellen Zahl, als beliebige reelle Zahlen gedacht aber allgemeine Symbole reeller Zahlen repräsentieren. Ebenso wird man beim Beweis eines Satzes über das ebene Dreieck in der Anschauung ein einzelnes bestimmtes Dreieck von bestimmter Grösse und Gestalt festhalten (oder auch dasselbe durch Zeichung versinnlichen); sofern aber im Beweise nur der allgemeine Begriff des ebenen Dreiecks benutzt worden ist, nicht aber die besonderen Eigenschaften des einzelnen vorgestellten, wird der bewiesene Satz für alle ebenen Dreiecke gültig sein. Das einzelne vorgestellte Dreieck und dessen einzelne Lagenbeziehungen (Seiten, Winkel etc.) sind dann Repräsentanten aller ebenen Dreiecke und ihrer Lagenbeziehungen. Das Weitere über den direkten Beweis wird bei der Einteilung der Beweise nach dem zweiten Gesichtspunkte vorkommen.

Der indirekte Beweis hatte die Ungültigkeit des kontradiktorischen Gegenteiles (Non-T) von dem gegebenen Satz (T) nachzuweisen, wodurch der unmittelbare Rückschluss auf die Gültigkeit von T gerechtfertigt war. Es handelt sich jetzt um Feststellung der Kriterien, nach denen man die Ungültigkeit von Non-T zu beurteilen hat. Wir setzen zunächst voraus, dass Non-T sich auf einmal als kollektiver Fall behandeln lässt (wie solches stattfindet bei dem Lehrsatz T, welcher die Maximalzahl der Doppelpunkte einer eigentlichen Curve n-ter Ordnung bestimmt). Dann wird man Non-T in seine notwendigen Folgen entwickeln und zeigen, dass wenigstens eine derselben, Q, im Widerspruch steht entweder mit der Hypothesis oder mit bereits feststehenden Sätzen (Lehrsätzen, Grundsätzen), dass also die Folge Q, ihre folgerichtige Ableitung aus Non-T vorausgesetzt, eine ungültige sein muss. Aus der Ungültigkeit von Q schliesst man (modo tollente) zurück auf die Ungültigkeit der Bedingung Non-T von Q und von dieser auf die Gültigkeit des Satzes T. — Wenn aber der Satz Non-T eine seinen ganzen Inhalt umfassende Behandlung unmittelbar nicht zulässt, so muss man für Non-T alle in diesem Satze enthaltenen Möglichkeiten, d. h. seine sämtlichen Fälle A, B, C . . . substituieren, die zum Teil oder sämtlich auch kollektiv sein können [z. B.: T: $a = b$: Non-T: $a \gtrless b$; A: $a > b$; B: $a < b$]. Von jedem dieser Fälle hat man dann einzeln (genau wie im ersten Falle von Non-T) den Nachweis der Ungültigkeit zu führen und diese Nachweise dahin zusammen zu fassen, dass Non-T notwendig ungültig, mithin T notwendig gültig ist. Zur Triftigkeit des ganzen Beweises ist namentlich eine vollständige Disjunktion der einzelnen Fälle A, B, C... von Non-T erforderlich.

Nach dem zweiten Gesichtspunkte zerfallen die Beweise in deduktorische und induktorische. In einem Beweise der ersten Art zeigt man, dass dem ganzen Subjekt S (Hypothesis) des zu erweisenden Satzes T, den wir in der symbolischen Form S — P denken können, auf einmal; in einem der zweiten, dass jeder Art des Subjektes das Prädikat P zukommt. Der deduktorische geht also vom Subjekt aus und ordnet dasselbe (oder das Ergebnis anschaulicher Umformungen aus demselben) einem allgemeineren Begriff unter und schliesst vom Allgemeinen auf das Besondere. Der induktorische zerfällt in eine Anzahl deduktorischer Beweise für die einzelnen Arten von S und schliesst dann von der Geltung des Satzes T für alle Arten von S auf die Geltung desselben für S überhaupt, d. h. vom Besonderen auf

das Allgemeine. Die Beweiskraft des induktorischen Beweises hängt also (ähnlich wie beim indirekten) namentlich ab von der Vollständigkeit der Einteilung, d. h. Zerlegung von S seinem Umfange nach. Deshalb unterscheidet man diesen Beweis als die vollständige von der „unvollständigen Induktion", welche mit dem Begriff des Beweises nichts zu thun hat und uns daher nicht angeht.

Eine Nebenform des induktorischen Beweises ist der in der Mathematik bekannte „Beweis von n zu $n + 1$" oder der „in Bezug auf n induktorische Beweis". Er findet Verwendung bei solchen Sätzen T, für welche die einzelnen Fälle der Geltung von T ihrer Natur nach eine Reihe bilden, in welcher das Bildungsgesetz aller Glieder ein einheitliches von der Ordnungszahl (wenn wir uns jene natürliche Reihe hergestellt denken) jedes Gliedes abhängiges ist. Zweck dieses Beweises im besonderen ist zu zeigen, dass ein Satz T (etwa) von allen ganzen positiven Zahlen n gelte und zwar von einer bestimmten Zahl $n = n_1$ an. Der Beweis selbst besteht aus zwei Teilen: man nimmt erstens an, dass der Satz T für irgend eine (n) der genannten Zahlen, oder kurz, dass T (n) gelte und beweist, dass unter dieser Voraussetzung der Satz auch für $n + 1$ gilt. Die Beweisgründe für T ($n + 1$) bestehen dann in Axiomen, Definitionen, früher bewiesenen Lehrsätzen und dem vorläufig als gültig angenommenen Satze T (n). Zweitens hat man zu zeigen, dass der Satz T für den besonderen Wert $n = n_1$, d. h. dass der Satz T (n_1) gelte. Hierdurch werden die sämtlichen Beweisgründe von T ($n_1 + 1$), mithin dieser Satz selbst gültig. Nach dem zweiten Teil des Beweises gilt also T für n_1, somit nach dem ersten für $n_1 + 1$. Hieraus folgt nach dem ersten Teile weiter die Geltung für $n_1 + 2$ und successive $n_1 + 3$, $n_1 + 4$, . . .

Mit den genannten Formen ist die Reihe der Beweisarten abgeschlossen. Dieselben können in einem gegebenen Falle auf mannigfache Weise verbunden werden; sie bilden dann im Einzelnen die für jeden Abschnitt des Beweises einzuschlagenden Gedankengänge.

Ausser den genannten wären (nach Lotze) noch weitere Gesichtspunkte für Einteilung der Beweise zulässig gewesen, wenn im Augenblick der Name „Beweis" als Sammelname für 1. Beweis, 2. Widerlegung, 3. Auffindung der Beweisgründe gebraucht werden darf. Nämlich die Richtung von dem der Natur der Sache nach Bedingenden zum Bedingten und die ihr entgegengesetzte geben dem progressiven, bezüglich regressiven Beweis den Ursprung. Denkt man sich symbolisch unter G die Beweisgründe von T, unter F die notwendigen Folgen von T, sodass G - T - F die Richtung vom Bedingenden (Grund) zum Bedingten (Folge) repräsentiert, so wären zwei in den Richtungen G T F resp. F T G gehende Beweise ein progressiver resp. regressiver. In beiden Fällen kann man sich, G T F unter dem Bilde von Punkten gedacht, entweder in der Strecke GT (TG) oder TF (FT) bewegen. Die so entstehenden beiden Beweisformen kann man „Beweise erster" resp. „zweiter Art" nennen. Hiernach giebt es vom progressiven Beweise eine erste Art: 1. G T und eine zweite: 2. T F; vom regressiven eine erste: 3, T G und eine zweite: 4, F T. Alle vier können entweder direkte oder indirekte Beweise sein, so dass es nach den soeben entwickelten Gesichtspunkten acht Arten des Beweises gäbe.

Es sei in Kürze über die vier direkten Beweisgänge Folgendes bemerkt, ohne dass indessen auf die Idee jedes einzelnen derselben näher eingegangen würde.

Die unter 1. angeführte Form G T ist der deduktorische Beweis. — Die Bedeutung des zweiten Falles T F ist folgende. Wenn man aus dem unbewiesenen Satz T seine Folgen F bis zu einem gewissen Grade entwickelt hat, so ist es möglich, dass keine der Folgen F anderweitig feststehenden Wahr-

heiten oder einer anderen unter diesen Folgen widerspricht; aber es ist auch möglich, dass einige der folgerichtig abgeleiteten Konsequenzen F einen solchen Widerspruch herbeiführen. Im zweiten Falle wird man auf die Ungültigkeit von T zurückschliessen; man wird also diesen Satz widerlegt haben. Trifft aber der erste Fall ein, so hat man noch kein Recht, den Satz T für gültig zu erachten, da bereits die nächsten weiter abzuleitenden Folgen zu einem Widerspruch führen können. Ferner dient die durch T F symbolisierte Gedankenbewegung bei den sogenannten Aufgaben zur Auffindung der Lösung.

Findet man für den dritten Fall T G bei Aufsuchung der Bedingungen G der Gültigkeit von T unter den ersten materiell falsche Sätze G, so ist damit T widerlegt; sind aber diese sämtlichen Bedingungen G gültige, so hat man durch Aufstellung der letzteren die Beweisgründe von T gefunden. Der Beweis des Satzes T entsteht dann durch Umkehrung des Verfahrens T G, d. h. derjenigen Schlusskette, durch welche man von T aus zu den Sätzen G gelangte.

Indem wir kurz bemerken, dass wir unter der vierten Form F T den induktorischen Beweis wiederfinden würden, schliessen wir hiermit die Betrachtung der acht aufgestellten Gedankengänge. Dieselben liefern ausser eigentlichen Beweisen die zur Auffindung von Beweisgründen und Lösungen von Aufgaben, ferner die zur Beurteilung der Gültigkeit oder Ungültigkeit des gegebenen Satzes T (2. Fall T F) führenden Wege. Es ist indessen die Auffindung der Beweisgründe von der Darstellung ausgeschlossen worden; auch wurde vorausgesetzt, dass jeder in Betracht kommende Satz T ein gültiger sei. Weil ferner die vier genannten direkten und die vier indirekten Formen keine neuen Formen des Beweises (im Gegensatz zur Erfindung, aber auch zur Widerlegung) zu den oben aufgestellten hinzubringen, so ist es nicht nötig, auf die ersten noch näher einzugehen.

Von den sogenannten „Beweisen durch Analogie“ ist im Vorstehenden nicht gehandelt worden. Die Analogie als solche ist bei einem Beweisverfahren niemals der Grund für die Triftigkeit des Beweises; sie führt höchstens das suchende Nachdenken auf den richtigen Weg, auf dem man einen hinlänglichen Beweisgrund findet (Lotze, Logik). Auf diesem letzteren und anderen Beweisgründen, nicht aber auf jener Analogie beruht dann die Zuverlässigkeit des Beweises. — Man unterscheidet ferner „Beweise nach strenger Analogie“. In ihnen wird ein Begriff a einem allgemeineren Begriffe untergeordnet, eine allgemeine Eigenschaft des letzteren als Obersatz hinzugenommen und in dem aus diesen Prämissen ableitbaren Schlusse diese Eigenschaft auf a übertragen. Ein solcher Beweis beruht also auf Subsumption unter ein Allgemeines und ist somit in den obigen Beweisformen enthalten.

Die Erörterungen über Beweise von Lehrsätzen werden hiermit abgeschlossen, indem auf eine Behandlung der zu vermeidenden Beweisfehler verzichtet wird.

2) Deduktion von Begriffen.

Es war in der Einleitung auf den Unterschied zwischen ursprünglichen und abgeleiteten Begriffen hingewiesen, und die Feststellung der letzteren geschah durch die Definition. Ein abgeleiteter Begriff B war aber, obwohl völlig scharf definiert, noch nicht als gültig anzusehen, wie das Beispiel des Begriffes eines ebenen Dreiecks es zeigt, das zugleich rechtwinkelig und gleichseitig sein soll. Es bedurfte mithin ein definierter Begriff noch der Nachweisung seiner Gültigkeit oder kurz der Deduktion.

Ein solcher Begriff B ist nun entweder ein durch Erfahrung gegebener (von der Erfahrung aufgedrängter) oder ein gemachter. (Die Veranlassung zum Bilden eines Begriffes überhaupt besteht frei-

lich in letzter Instanz in der äusseren Erfahrung d. h. sinnlichen Wahrnehmung). Ein Begriff der ersten Art, objektiv gefasst, hat thatsächliche Geltung. Ob aber der im Denken aufgefasste Begriff mit jenem objektiven übereinstimmt oder nicht, ob er Widersprüche involviere, ist noch die Frage. In letzterem Falle kann er logisch nicht gültig sein. Es würde also die Unvereinbarkeit der thatsächlichen Geltung einerseits und der logischen Ungültigkeit eines solchen Begriffes andererseits eine Lösung erfordern. Die Erörterung der hierzu geeigneten Denkformen liegt ausserhalb des Bereiches unserer Aufgabe, da dieselben sowie die ganze Behandlung von (abgeleiteten) Erfahrungsbegriffen in die Lehre von den heuristischen Formen des Denkens gehören. Für unsere Betrachtung bleiben mithin nur die gemachten oder ersonnenen Begriffe unter den abgeleiteten übrig, und nur solche werden fortan in diesem Abschnitt unter Begriffen (B) schlechtweg verstanden.

Gruppe I. Der einfachste Fall ist, dass der ersonnene Begriff B eine Verknüpfung von Vorstellungen (bereits bekannten Begriffen) repräsentiert, welche in innerer Anschauung unmittelbar ausgeführt oder verwirklicht werden kann. Begriffe dieser Art pflegt man genetisch zu definieren; und man nennt eine genetische diejenige Definition, in welcher die Denkhandlungen bezeichnet werden, durch deren Ausführung die Vorstellung vom Inhalte des Begriffes entstehen (kann oder) muss. Im Gegensatz zu dieser würde eine Definition etwa deskriptiv genannt werden, wenn sie den zu definierenden Begriff durch die Merkmale bestimmt, welche er als ein vor unserem Bewusstsein vollendet dastehender besitzt. Die Geometrie bedient sich nicht selten des genetischen Definitionsverfahrens, indem sie den eigentlich der reinen Mathematik fremden Begriff der Bewegung zu Hülfe nimmt. Die Stereometrie z. B. kann die Kugelfläche als das Rotationserzeugnis einer Halbkreislinie um ihren Durchmesser oder eine (Kreis-) Kegelfläche als eine Fläche definieren, welche von einer geraden Linie beschrieben wird, die sich längs der Peripherie eines festen Kreises bewegt und stets durch einen festen Punkt ausserhalb der Ebene dieses Kreises geht.

Gruppe II. Eine zweite Schar der Begriffe B besitzt zwar auch, wie die eben genannte, eine anschauliche Gültigkeit, indem die Anschauung aus gegebenen Beziehungspunkten den Begriff B als einen gültigen durch einfache Gedankenbewegungen hinstellt; es ist aber hier nicht möglich, die Konstruktion des Begriffes aus seinen Beziehungspunkten unmittelbar zu vollziehen. In diesem Falle ist die Zuhülfenahme von bereits feststehenden Lehrsätzen erforderlich.

Dieser Art der Rechtfertigung bedient sich beispielsweise die Geometrie bei einem Teil der von ihr aufgestellten Begriffe. Handelt es sich etwa um die Möglichkeit eines Punktes M, welcher in einer Strecke AB liegen und von A und B gleich weit entfernt sein soll, so wird man sich einen Punkt P innerhalb AB und verhältnismässig nahe an A denken; dann ist PA kleiner als PB. Bewegt sich nun der Punkt P in der Richtung nach B, so wird PB um dasselbe Stück kleiner, um welches PA grösser wird. Nachdem P eine gewisse Strecke zurückgelegt hat, wird PA grösser als PB. Es wird also in AB irgend einen Punkt M von der Art geben, dass, wenn P in ihn hineinfällt, $PA = PB$ ist. Diesen Punkt M definiert man dann als die Mitte der Strecke. Auf ähnliche Weise werden anschaulich gerechtfertigt die Begriffe der Halbierungsgeraden eines Winkels, des Lotes von einem Punkte auf eine nicht durch ihn gehende Gerade u. dgl.

Die Geometrie hält aber trotz dieser vorläufigen Rechtfertigung die genannten Begriffe nicht eher für gültig, als bis sie die entsprechenden Aufgaben (eine gegebene Strecke zu halbieren, etc.) mit

Zirkel und Lineal (wenn auch nur in der Anschauung) gelöst hat, mit anderen Worten, bis sie sichere Wege zur Verwirklichung der bereits definierten Begriffe an gewissen durch Zeichnung gebenen Stücken aufgefunden hat. Hierzu ist die Kenntnis bestimmter Lehrsätze erforderlich; z. B. für die angezogene Aufgabe, eine gegebene Strecke zu halbieren, die Kenntnis des Satzes: die Verbindungslinie der Spitzen zweier gleichschenkeligen Dreiecke mit gemeinsamer Basis schneidet die letztere in ihrer Mitte. — Das Problem der Trisektion eines Winkels fordert die Herstellung zweier von dem Scheitel eines gegebenen Winkels ausgehenden Strahlen, durch welche der Winkel in drei gleiche Teile geteilt wird. Für den Begriff dieser beiden Geraden ist jene vorläufige Rechtfertigung fast eben so einfach zu leisten, wie in dem oben genannten Beispiele, so dass ihre Definition keine Schwierigkeit macht. Trotzdem sieht die (elementare) Geometrie, der von mechanischen Mitteln nur Lineal und Zirkel zu Gebote stehen, den Begriff dieser Trisektionsstrahlen nicht als gültig, sondern als problematisch an, weil sie keine sicheren Wege zur Konstruktion der beiden Strahlen für einen gegebenen Winkel gefunden hat. Aehnliches gilt von dem gleichfalls aus dem Altertum bekannten Problem der Verdoppelung des Würfels. — Die Geometrie leistet also die Deduktion für einen Teil der von ihr aufgestellten Begriffe durch Konstruktion. — Von der Arithmetik gilt Aehnliches. Nachdem etwa die Definition festgesetzt ist: „Zweite Wurzel aus einer Zahl a heisst jede Zahl, deren zweite Potenz = a ist", hält die Arithmetik den Begriff der zweiten Wurzel aus a nicht eher für gültig, als bis sie unzweideutige Wege zur Auffindung der beiden Quadratwurzelwerte gefunden hat, welche jeder (zunächst als positiv) gegebenen Zahl a entsprechen. Der Begriff der Konstruktion lässt sich von geometrischen auf arithmetische Aufgaben ohne Zwang übertragen.

Gruppe III. Die Begriffe B einer dritten Gruppe besitzen, wenn auch vollkommen scharf definiert, zunächst oder a priori noch gar keine Gültigkeit. Ihre Begründung erfolgt durch den Beweis eines Lehrsatzes. Wenn man unter „Schwerlinie eines ebenen Dreieckes" jede Gerade (meist Strecke) versteht, welche durch einen Winkelpunkt des Dreieckes und die Mitte der Gegenseite geht; so ist der Schwerpunkt eines ebenen Dreieckes hinglänglich definiert als gemeinsamer Schnittpunkt der drei Schwerlinien dieses Dreieckes. Als gültig aber darf der Begriff des Schwerpunktes eines ebenen Dreieckes erst dann angesehen werden, wenn der Lehrsatz bewiesen ist: „Die drei Schwerlinien eines ebenen Dreieckes schneiden sich in einem Punkte (und teilen sich in ihm im Verhältnis 2 : 1)."

Die Deduktion oder die Nachweisung der Gültigkeit geschieht also bei der Gruppe I durch unmittelbare Anschauung; bei der II. und III. Gruppe geschieht sie mittelbar durch Auflösung einer Aufgabe, resp. mittelbar durch Beweis eines Lehrsatzes.

Im ersten Falle (Gruppe I) werden gewisse Begriffe als gültig vorausgesetzt und die Deduktion des definierten Begriffes wird durch anschauliche Operationen mit den entsprechenden Vorstellungen vollzogen. Der Grund für die Richtigkeit der Deduktion ist die unmittelbare Anschauung. Wenn unter den als bekannt vorausgesetzten Begriffen nur solche der ersten Gruppe und Grundbegriffe vorhanden sind, so beruht die Deduktion in letzter Instanz auf Grundbegriffen. Wenn dies nicht der Fall ist, so gilt hier dasselbe, was unten für die Gruppen II und III gesagt werden wird. Die Grundbegriffe sind als unmittelbar gültige einer Deduktion nicht fähig; ihre Gültigkeit wird unmittelbar gefordert. Diejenigen (grammatischen) Sätze, welche die Forderung der unmittelbaren Gültigkeit von Grundbegriffen aussprechen, heissen (ihrem logischen Werte nach) Forderungssätze (postulata, *αἰτήματα*), auch praktische Grundsätze, da sie eine unvermittelte Erzeugung der entsprechenden Vorstellungen verlangen, im

Gegensatz zu den Grundsätzen, welche die Anerkennung einer unmittelbar gültigen Beziehung zwischen zwei Inhalten erfordern.

Bei der zweiten Gruppe der Begriffe B geschah die Nachweisung der Gültigkeit durch Auflösung einer Aufgabe. Es war aber bei einer Aufgabe der Beweis nötig, dass die Lösung oder das Endergebnis gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genüge; und unter den Beweisgründen für die Richtigkeit des Ergebnisses befinden sich auch Lehrsätze, wie im nächsten Abschnitte näher erörtert werden wird. Zur Deduktion der Begriffe der III. Gruppe war direkt ein Lehrsatz nötig. Für die II. und III. Gruppe beruht daher die Deduktion in letzter Instanz zunächst auf Grundbegriffen, ausserdem aber auf Grundsätzen, da man in beiden Fällen zur Ausführung der Deduktion auch der Lehrsätze benötigt ist.

Die Begriffe der II. und III. Gruppe unterschieden sich dadurch, dass die erstgenannten a priori eine anschauliche Gültigkeit besassen, welche den letzteren abging, und dass ihre Deduktion durch Lösung einer Konstruktionsaufgabe resp. durch Beweis eines Lehrsatzes erfolgte. Ueberhaupt konstruierbar ist daher ein Begriff der III. Gruppe so gut, wie einer der zweiten, indem das Material für diese Konstruktion von demjenigen Lehrsatze geliefert wird, durch dessen Beweis nach der obigen Darstellung die Deduktion des betreffenden Begriffes geleistet wurde. So kann man z. B. nach beiden Teilen des oben unter Gruppe III aufgeführten Lehrsatzes den Schwerpunkt eines durch Zeichnung gegebenen Dreieckes konstruieren, indem man entweder zwei Schwerlinien zieht und den Schnittpunkt derselben auffasst, oder eine Schwerlinie zieht, dieselbe in drei gleiche Teile teilt und denjenigen der beiden Teilpunkte nimmt, welcher der Mitte der betreffenden Seite zunächst liegt.

3. Rechtfertigung der Lösung von Aufgaben.

Ein Problem oder eine Aufgabe fordert, zu einem Gegebenen entweder ein Bedingtes oder ein Bedingendes zu finden; es ist also bei ihm zwischen Gegebenem und Gesuchtem zu unterscheiden. Damit das Suchen auf methodische Weise geschehen könne, ist erforderlich, dass die Beziehungen des Gegebenen entweder zu dem Gesuchten oder den Beziehungspunkten des letzteren gegeben seien. Eine Aufgabe der ersten Art ist: Ein Dreieck zu konstruieren, dessen Seiten drei gegebene Längen besitzen. Eine der zweiten: Für ein ebenes Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, soll die zwischen den Gegenwinkeln bestehende Relation gefunden werden; das Gesuchte ist hier diese Relation (grösser, gleich, kleiner); die Beziehungspunkte, zwischen denen die Relation bestehen soll, sind die beiden Winkel; und deren Beziehung zu dem Gegebenen, den beiden gleichen Seiten, ist dadurch festgesetzt, dass die Winkel die Gegenwinkel jener Seiten sein sollen.

Anstatt den Beweis eines formulierten Lehrsatzes zu fordern, kann man eine Aufgabe in dem oben bestimmten Sinne stellen. Die Voraussetzung ist das Gegebene, die Behauptung das Gesuchte; hierbei muss, wie oben, die Aufmerksamkeit des Suchenden auf eine bestimmte unter den verschiedenen Folgen der Voraussetzung hingelenkt worden sein. Es handelt sich hier also darum, den Inhalt eines Lehrsatzes, wie im Beispiel die Gleichheit der Basiswinkel eines gleichschenkeligen Dreiecks zu finden.

Es kann aber auch eine Aufgabe (im Gegensatz zu dem Auffinden eines allgemeinen Lehrsatzes) die Herstellung eines singularen Ergebnisses verlangen, welches gewisse gegebene Eigenschaften besitzen oder gewissen Bedingungen genügen soll. Aufgaben dieser Art seien allgemein kurz

als **Konstruktions-Aufgaben** bezeichnet, ein Name, der als gerechtfertigt erscheint nach der oben berührten Erweiterung des Konstruktionsbegriffes.

Die Gedankengänge, welche zur Auffindung der Lösung erforderlich sind, liegen als heuristische Denkformen ausserhalb des Gebietes unserer Darstellung. Nachdem die Konstruktion vollzogen ist, bleibt übrig zu beweisen, dass die Lösung (resp. die Lösungen), im Sinne des Endergebnisses der Konstruktion gefasst, die geforderten Eigenschaften besitze. Es wird also hier nicht allein vorausgesetzt, dass die Lösung bereits gefunden, sondern auch, dass sie eine (richtige oder) gültige ist.

Es kann nun das Resultat oder die Lösung entweder 1. **in seiner Entstehung** oder 2. **in seiner Vollendung** d. h. **in sich selbst** den Beweisgrund für seine Richtigkeit enthalten. Der Beweis selbst ist durchaus dem Beweise eines Lehrsatzes analog. Der letztere floss aus der Hypothesis des Lehrsatzes und beruhte auf Definitionen, Grundsätzen und früher bewiesenen Lehrsätzen (für den Fall des abgekürzten Beweisverfahrens); indem man immer die besonderen Urteile oder Begriffe der Hypothesis zum Behufe des Schliessens unter allgemeine Urteile oder Begriffe subsumierte (und im letzteren Falle jedes Mal eine gewisse Eigenschaft des allgemeinen Begriffs hinzunahm). Für die erste Art unserer Konstruktionsaufgaben treten an Stelle der einzelnen Teile der Hypothesis die einzelnen Konstruktions-Leistungen, d. h. die einzelnen zur Herstellung des Gesuchten gethanen Schritte; für die zweite Art das Resultat oder die **fertige** Lösung. Der Behauptung des Lehrsatzes entspricht dann der (grammatische) Satz: Dieses (für den ersten Fall: nach und nach fertig gestellte) Ergebnis der Konstruktion besitzt die verlangten Eigenschaften. Alles übrige gilt gleichmässig für den Beweis der Richtigkeit eines Lehrsatzes, wie derjenigen der Lösung einer Aufgabe. Insbesondere ist auch für Aufgaben ein mehr oder weniger abgekürzter Beweis von einem entwickelten zu unterscheiden.

Ein Beispiel für die **erste** Art liefert die Aufgabe: Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite a, einem anliegenden Winkel β und der Fläche f^2. Oder: Gegeben sind zwei Längen a und f und ein Winkel β. Verlangt wird ein Dreieck ABC, in welchem $BC = a$, Winkel $ABC = \beta$ und die Fläche $ABC = f^2$ ist. — Die Konstruktion würde lauten: Mache $BC = a$ und trage in B an BC den Winkel $CBL = \beta$ an. Mache sodann (der Einfachheit halber in einer **Nebenfigur**) $EF = \frac{1}{2}a$, errichte zu EF das Lot $EG = f$, ziehe FG und errichte zu dieser in G ein Lot, welches die Verlängerung von FE in H schneidet. Errichte dann (Hauptfigur) auf BC in B nach der Seite von L ein Lot $BD = HE$, ziehe durch D zu BC eine Parallele, welche von dem Strahl BL in A geschnitten wird, und ziehe AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Zu beweisen ist 1) $BC = a$; 2) $\angle ABC = \beta$; 3) Fläche $ABC = f^2$. Wie 1) $BC = a$ herzustellen und 2) ein Winkel β an eine gegebene Gerade etc. anzutragen ist, hat die Konstruktion nicht ausgeführt, weil jedes von beiden eine einfache Leistung ist, die weit vor unserer Konstruktionsaufgabe in jedem systematischen Unterricht ausgeführt und als richtig bewiesen wird. (Der Beweis würde für 1. auf dem Begriff des Kreises [und der Geraden zwischen zwei Punkten], für 2. auf dem zweiten Kongruenzsatz [drei Seiten] beruhen). Den Grund der Richtigkeit für 1. und 2. zeigen wir daher kurz durch: ($BC = a$) „gemacht" an. Es bleibt dann 3. zu beweisen. Der Beweisgang ist seiner Idee nach kurz folgender, wenn wir uns mit Andeutungen begnügen. Fläche $ABC = \frac{BC.\ BD}{2}$ nach dem Satze: Die Fläche eines Dreieckes ist gleich dem halben Rechteck aus Grundseite und Höhe. (Eigentlich hätte

noch von A das Lot Ax auf CB gefällt werden müssen etc.). Es war aber $BC = a$ und $BD = HE$ (gemacht). Mithin $\triangle ABC = \frac{a. HE}{2}$. Nun ist (Nebenfigur) $EG \perp EF$ oder (HF) und $\angle FGH = 1$ R. nach Konstr.; Für jedes rechtwinkelige Dreieck aber gilt der Satz: das Quadrat der nach der Hypotenuse gehenden Höhe ist gleich dem Rechteck aus den beiden Höhenabschnitten. Somit ist $GE^2 = HE. EF$ oder $HE = \frac{GE^2}{EF} = \frac{2. f^2}{a}$(denn $GE = f$, $EF = \frac{1}{2}$ a gemacht). Mithin ist: $\triangle ABC = \frac{a . HE}{2} = \frac{a.2.f^2}{2 . a} = f^2$; was zu beweisen war.

Ein Beispiel der zweiten Art repräsentiert die Aufgabe: Diejenigen Winkel x zu finden, welche der Gleichung

$$a. \sin x + b. \cos x = c$$

mit a, b, c als reellen Zahlen genügen. — Die erfindende Gedankenbewegung könnte hier unter anderem in folgendem bestehen. Die linke Seite der gegebenen Gleichung erinnert an den Ausdruck ($\sin x. \cos y + \cos x \sin y$) für $\sin (x . + y)$. Damit aber a und b als cos. resp. sin. desselben Winkels y angesehen werden dürfen, ist die Relation $a^2 + b^2 = 1$ erforderlich. Da diese im allgemeinen nicht stattfindet, so wird man die gegebene Gleichung durch eine vorläufig unbestimmte Zahl h dividieren*), so dass

$$\frac{a}{h}. \sin x + \frac{b}{h}. \cos x = \frac{c}{h}$$

wird, und für die neuen Koefficienten $\frac{a}{h}$ und $\frac{b}{h}$ von sin x und cos x die Bedingung aufstellen, dass die Summe ihrer Quadrate = 1, also

$$\left[\frac{a}{h}\right]^2 + \left[\frac{b}{h}\right]^2 = 1,$$

woraus $(+) h = \sqrt{a^2 + b^2}$

und: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Setzt man jetzt $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos y$, so wird

$$(\pm) \sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Unsere Gleichung geht somit über in: $\sin x . \cos y + \cos x . \sin y = \sin (x + y) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (so dass c^2 nicht grösser als $a^2 + b^2$ sein darf, damit die Aufgabe lösbar sei). Hieraus wird: $x + y = \text{arc} \sin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$*) \; x = \text{arc} \sin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \text{arc} \sin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

*) Für die praktische Rechnung ist das bekannte Auflösungsverfahren vorzuziehen, nach welchem man die Gleichung durch a dividiert, dann $\frac{b}{a} = \text{tang}\, y \left(= \frac{\sin y}{\cos y}\right)$ setzt und mit cos y multipliciert, wodurch man links gleichfalls den Ausdruck $\sin (x + y)$ erhält.

Eine Lösung der Aufgabe ist also jeder Wert x, welcher durch die Gleichung *) gegeben ist.

Dass diese Werte x aus *) sämtlich die gegebene Gleichung zu einer identischen machen, oder dass die Gleichung *) zur notwendigen Folge die gegebene Gleichung $a.\sin x + b.\cos x = c$ hat, folgt allein aus dem Resultate *), wir mögen zu ihm auf was immer für einem Wege, etwa auf anderen methodischen Wegen oder sogar durch Zufall gekommen sein. Der Beweis wäre kurz folgender. Aus der Gleichung *) erhalten wir unter Anwendung der bekannten Formeln für $\sin(\varkappa - \lambda)$ und $\cos(\varkappa - \lambda)$:

$$\sin x = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \left[a.c - b.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \right]$$

$$\cos x = \frac{1}{a^2 + b^2} \cdot \left[a.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + bc \right]$$

Multiplicieren wir die erste Gleichung mit a, die zweite mit b, und addieren wir, so wird:

$$a.\sin x + b.\cos x = \frac{1}{a^2 + b^2} \left\{ (a^2 + b^2).c - ab.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} + ab.\sqrt{a^2 + b^2 - c^2} \right\} = c.$$

Unterdrücken wir das Mittelglied der Doppelgleichung, so ist im Vorstehenden die Beziehung: $a.\sin x + b.\cos x = c$ als notwendige Folge von *) abgeleitet. Das Nämliche wird in anderer Form durch die Doppelgleichung ausgedrückt, wenn wir nur die beiden letzten Glieder auffassen; die Gleichung sagt dann aus, dass alle Werte *) die gegebene Gleichung zu einer identischen machen.

Anmerkung. Die Unterscheidung der beiden Arten von Konstruktions-Aufgaben war notwendig, desgleichen im Prinzip notwendig die Forderung eines Beweises für Aufgaben der zweiten Art, wenn man auch bei ihnen meist keinen Beweis verlangen wird. Jedenfalls ist zu fordern, dass die gültigen Lösungen vollständig hergestellt und etwa ungültige, welche man mit den gültigen gleichzeitig findet, ausgeschlossen werden. Die Gleichung 1, $x + \sqrt{x + 3} = 4x - 1$ heisst in reduzierter Form: 2, $x^2 - \frac{7}{9}x = \frac{2}{9}$ und die Wurzeln der letzteren sind $x_1 = +1$, $x_2 = -\frac{2}{9}$. Dies Wurzelpaar bedingt zwar wieder die Gleichung 2., indem die letztere durch Multiplikation der Gleichungen $x - 1 = 0$ und $x + \frac{2}{9} = 0$ hervorgeht, ähnlich wie bei der Aufgabe des Textes. Dagegen wird die Gleichung 1, nur durch x_1 erfüllt, während das Vorzeichen der Wurzel zu ändern ist, wenn diese Gleichung auch durch x_2 zu einer identischen gemacht werden soll. Legt man also darauf Wert, dass die Aufgabe in der Form 1 gegeben ist, so ist x_2 zu verwerfen. — Bei Konstruktionsaufgaben, in denen ein algebraischer Ausdruck zu konstruieren ist, wie bei der als Beispiel für die erste Art aufgeführten, wird ein Beweis mehrfach für überflüssig erklärt. Der Verfasser ist der Meinung, dass ein Beweis bei ihnen stets zu verlangen ist, und hat daher ein Beispiel dieser Art absichtlich gewählt.

II. *Wie findet man die unmittelbaren Wahrheiten?*

Bei der Begrenzung der Aufgabe war der Begriff der unmittelbaren Wahrheiten dahin festgestellt, dass unter ihnen die unmittelbar feststehenden Begriffe sowohl, als Urteile verstanden werden, wobei der Grund für das unmittelbare Feststehen nicht in der äusseren Erfahrung zu suchen ist.

1) Grundbegriffe.

Wir betrachten zunächst die Grundbegriffe. Da dieselben nicht aus anderen, von ihnen unabhängigen, Begriffen abgeleitet werden können, so sind sie keiner Definition fähig. Wohl aber handelt

es sich auch bei ihnen um die Begründung ihrer Gültigkeit. Diese Grundbegriffe sind nun, wie gleich hier vorweggenommen und unten ausführlicher erörtert werden soll, entweder an sich unmittelbar gültig; oder sie werden es, sobald man ihnen ihre konträren Gegensätze gegenüberstellt oder sie in ihre Arten einteilt.

Als ein Beispiel für das Gegenüberstellen der konträren Gegensätze verdienen die Formen der Wirklichkeit hervorgehoben zu werden. Es giebt einen sehr allgemeinen Begriff der Bejahtheit oder Position, für welchen die deutsche Sprache das Wort „Wirklichkeit" („es giebt", „stattfinden") ausgebildet hat (Lotze, Logik). Der Sinn, welchen dieses Wort (oder das Adjektiv oder Adverb „wirklich") besitzt, ist in verschiedenen Fällen sehr verschieden; nur die Bejahung ist immer in ihm enthalten. Das Prädikat „wirklich" legen wir einem Dinge bei, welches ist, im Gegensatz zu einem, welches nicht ist; einem Ereignis, welches geschieht oder geschehen ist, im Gegensatz zu einem, welches nicht geschieht oder nicht geschehen ist; einem Verhältnis, welches besteht, im Gegensatz zu einem solchen, welches nicht besteht; endlich einem Begriffe oder Urteil (Satz, Gesetz), welcher (und welches) gilt, und wir sprechen dies Prädikat einem Begriffe und Urteile ab, oder erkennen es ihm wenigstens noch nicht zu, je nachdem die Gültigkeit desselben überhaupt nicht stattfindet, oder doch noch nicht erwiesen ist. Keine dieser Formen der Wirklichkeit lässt sich in eine andere überführen; und jedes Objekt unseres Denkens, welchem überhaupt das Prädikat bejaht oder wirklich zukommt, ist nur einer Art der Wirklichkeit fähig mit Ausschluss aller übrigen. Es ist unmittelbar verständlich, dass ein Ereignis weder sein (gewesen sein) kann, wie die Dinge, noch bestehen, wie die Verhältnisse, noch gelten, wie ein Begriff, ein Satz, ein Natur-, ein Staats-Gesetz; dass vielmehr die einzige ihm zugängliche Form der Wirklichkeit das Geschehen ist. Nach dieser Gegenüberstellung ist also jeder dieser Begriffe: Sein, Geschehen, Bestehen, Gelten, sowie der allgemeinere Begriff Wirklichkeit als ein unmittelbar gültiger, als ein in sich abgeschlossener Grundbegriff anzusehen, in dem Sinne, dass er nicht mehr in Bestandteile zerlegbar ist, in denen er selbst nicht schon enthalten wäre.

Ein weiteres Beispiel für die unmittelbare Geltung der Grundbegriffe liefert der Begriff der Zahlgrösse (oder auch Grösse überhaupt), ein Beispiel, welches hier angeführt werden soll, im Anschluss an das, was oben von den Postulaten gesagt worden ist. Ein Postulat der Arithmetik ist das folgende: „Die Einheit beliebig oft herzustellen (zu denken) und die Einzelergebnisse (Einzelvorstellungen) zu einem Ganzen zusammenzufassen." Die praktische Bedeutung desselben ist die Aufgabe, die natürliche Zahlenreihe zu erzeugen; die in dem Postulate ausgesprochene Idee aber ist, dass das verlangte Verfahren ein ursprüngliches, unmittelbar vom Denken zu leistendes (oder ausführbares) sei, und dass die Begriffe der Einheit und jener Zusammenfassung (Addition), also auch der Begriff der „ganzen positiven Zahlen", als der Resultate dieser Zusammenfassung, unmittelbar gültige seien. Solche durchaus unmittelbare Erkenntnis, welche psychologisch gar nicht mehr in Momente zu zergliedern ist, soll mit dem Namen „Anschauung" bezeichnet werden. Dass diese Art, zu einer Zahl (6) eine andere (1) hinzuzufügen und beide zu einem ihnen gleichartigen Ganzen (7) zusammenzufassen, eine ausführbare Denkhandlung ist, während eine gleiche Verknüpfung bei zwei anderen Vorstellungsinhalten, (anderen nämlich, als Grössen), etwa bei rot und gelb, und Zusammenfassung zu einem Ganzen (z. B. orange) nicht möglich ist; dies ist eine unvermittelt feststehende Thatsache des Bewusstseins oder der Anschauung in dem eben festgesetzten Sinne dieses Wortes.

Es verhält sich ähnlich mit den drei Postulaten, welche Euklides seiner Geometrie vorausschickt. (1. Zwischen zwei gegebenen Punkten eine Gerade zu ziehen; 2. Eine gegebene Strecke über einen gegebenen Endpunkt hinaus beliebig weit zu verlängern; 3. Um einen gegebenen Punkt als Mittelpunkt mit einer gegebenen Länge einen Kreis zu beschreiben). Diese Postulate enthalten praktisch aufgefasst jedes Mal die Forderung einer mechanischen Leistung, die mit geeigneten Instrumenten leicht zu vollziehen ist; die in ihnen enthaltene Idee aber ist, wie oben, dass die Begriffe der Strecke, der nur einseitig begrenzten, sowie der beiderseits ins Unendliche gehenden Geraden, ebenso der Begriff des Kreises als unmittelbar gültige angesehen werden sollen. Nachdem also diese Begriffe erst definiert worden sind, kommen diese Postulate hinzu und vertreten die Deduktion der ersteren.

Indem wir auf eine weitere Behandlung der Grundbegriffe z. B. noch desjenigen der Bewegung und des sich hierbei ergebenden Postulates eines starren und im Raume absolut festen „Körpers," der mindestens aus vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten zu bestehen hat, verzichten, gehen wir über zu der Frage, wie man die unmittelbar gewissen Urteile (Sätze) findet.

2. Grundsätze.

Das Kennzeichen, welches ein Satz besitzen muss, um zu den Axiomen gerechnet werden zu dürfen (unmittelbar feststehenden allgemeinen Sätzen, die daher eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind), kann nur in der unmittelbaren Klarheit bestehen, mit welcher der Inhalt desselben sich uns als denknotwendig aufdrängt. Die Geschichte der Wissenschaft lehrt indessen, dass selbst diese Evidenz trügerisch sei, indem früher für evident gehaltene Sätze in späteren Zeiten als unrichtig gegolten haben.

Um nun zu prüfen, ob bei einem uns evident erscheinenden Satze T diese Evidenz zuverlässig sei oder nicht, kann die Logik nur ein Mittel an die Hand geben: man hat das kontradiktorische Gegenteil Non-T (oder die einzelnen Fälle, Möglichkeiten desselben) des gegebenen Satzes T auf seine Evidenz oder Undenkbarkeit zu prüfen. Wenn dann Non-T unmittelbar uns als denkunmöglich erscheint, so werden wir um so sicherer den Satz T für allgemeingültig halten. Ist dies aber nicht der Fall, so wird T entweder ganz oder teilweise ein Irrtum, oder endlich doch giltig, aber eines Beweises bedürftig sein. Hinlängliche Gewissheit aber giebt auch dies Verfahren nicht, da Evidenz, sei es der Denknotwendigkeit oder Denkunmöglichkeit, sowohl auf der Seite von T, als der von Non-T die Entscheidung liefern soll. Man hat dann, um die Frage zu entscheiden, sowohl den Satz T, als Non-T (oder dessen einzelne Fälle), jeden in seine Konsequenzen zu entwickeln. Die Folgen von Non-T werden dann denen von T widersprechen. Wenn nun die folgerichtig abgeleiteten Konsequenzen des einen Satzes, etwa Non-T, einen inneren Widerspruch herbeiführen, so wird man auf die Ungültigkeit von Non-T, d. h. auf die Gültigkeit von T zurückschliessen. Es ist aber auch der Fall möglich, dass weder die bis zu einem gewissen Grade entwickelten Folgen von T, noch die von Non-T einen inneren Widerspruch involvieren; in diesem Falle wird man den Satz T (sowohl als Non-T) so lange für unbeweisbar halten, bis auf der einen oder anderen Seite ein solcher innerer Widerspruch (oder ein Widerspruch mit anderweitig feststehenden Sätzen) sich einstellt, was schon bei den nächsten Schritten der Weiterentwickelung stattfinden kann.

Das Kennzeichen der Axiome also war die unvermittelte Evidenz, mit welcher sich der Inhalt derselben uns als denknotwendig aufdrängte. Es handelt sich noch darum, woher dem Denken solche

unmittelbar denknotwendigen Sätze kommen. Man spricht von dem menschlichen Geiste angeborenen (Ideeen, Erkenntnissen und) Wahrheiten und meint damit die sogenannten unmittelbaren Wahrheiten. Als angeboren darf indessen nur die Fähigkeit dieser unmittelbaren Erkenntnis, nicht aber der Inhalt der letzteren angesehen werden. Mit anderen Worten: Diese unmittelbaren Sätze dürfen nicht als ein ursprünglich dem Geiste gegebener fester Besitz angesehen werden; sie haben vielmehr sämtlich erst aufgefunden werden müssen. Gefunden aber sind sie dadurch, dass konkrete Einzelfälle, welche durch sinnliche Wahrnehmung oder Einbildungskraft dem Geiste vorgeführt wurden, den letzteren veranlassten, seine Aufmerksamkeit auf die einfachsten, in jenen Beispielen enthaltenen Beziehungen zu richten; dann trat wie eine plötzliche Offenbarung unmittelbar der Inhalt der Grundsätze [eben jene ursprünglichen Beziehungen] als ein denknotwendiger hervor. Ohne eine empirische Anregung zu seiner Befolgung also wird keiner dieser Grundsätze von uns aufgefasst und als Obersatz eines Schlussverfahrens verwertet; zum Gegenstand unseres Bewusstseins aber wird er erst durch Reflexion auf seine unbewusst in Folge jener empirischen Anregung geschehenen Anwendungen. (Lotze, Logik.)

Der Inhalt eines solchen Satzes ist also, sobald er auch nur ein Mal vorgestellt ist, als ein für immer gültiger anzusehen, nicht aber als ein durch Induktion aus einzelnen Beispielen gewonnener (in welchem Falle er assertorische Modalität haben würde); vielmehr ist derselbe auf Anregung dieser Beispiele hin als denknotwendig, als apodiktisch durch die Anschauung legitimiert und deshalb fähig, als Obersatz des Schliessens verwandt zu werden. Insofern also ein Satz diese Art der Legitimation besitzt, zählt man ihn zu den apriorischen Wahrheiten. — Nach der dieser (aprioristischen) entgegengesetzten (empiristischen) Auffassung würde das jedesmalige Bewusstwerden des Inhaltes eines solchen Satzes als eine einmalige, assertorisch gegebene, psychische Thatsache zu betrachten sein, von welcher abzuwarten wäre, ob sie sich in gleicher Weise wiederholen werde; eine Thatsache mithin, deren allgemeine Geltung niemals als sicher hingestellt, sondern höchstens wahrscheinlich werden könnte durch Übereinstimmung möglichst vieler Wiederholungsfälle und das Fehlen von Fällen, die mit jenen ersten im Widerspruch stehen.

Dies ist in Kürze dasjenige, was von den unmittelbaren (oder apriorischen) Wahrheiten zu sagen ist. Insbesondere gilt das Gesagte auch von den der Mathematik zu Grunde liegenden unmittelbaren Wahrheiten. — Zum Schluss sei noch eine kurze Betrachtung der an der Spitze der Deduktion stehenden Sätze für den Fall der mathematischen Physik gestattet. Obwohl sie zum Teil weder „beweisbar", noch „unmittelbar gültig" sind in den festgesetzten Bedeutungen dieser Ausdrücke, so ist dieser Gegenstand doch heranzuziehen, da er, wenn auch nicht durch den Wortlaut des Themas, so doch der Idee desselben nach gefordert ist.

Die an der Spitze der Deduktion stehenden Sätze für das Gebiet der mathematischen Physik.

Zum Schluss haben wir noch die Naturwissenschaften zu betrachten und zwar nur denjenigen Teil, der durch die Naturlehre oder Physik (im weitesten Sinne) repräsentiert wird. Denn die beschreibenden Teile der Naturwissenschaft haben mit Beweisen nichts zu thun; es giebt in ihnen keine unmittelbaren Wahrheiten in der oben festgesetzten Bedeutung; im Gegenteil beruht die Richtigkeit ihrer Sätze

auf der sinnlichen Wahrnehmung unter der Voraussetzung, dass auch die Denkhandlung richtig sei, durch welche wir den ursprünglich allein gegebenen Inhalt der Wahrnehmung zu einem Urteil gestalten.

Da die Grundbegriffe der Physik bereits oben von der Betrachtung ausgeschlossen sind, so bleiben nur die an der Spitze der Deduktion stehenden Sätze übrig. Ob es unter ihnen überhaupt unmittelbare Wahrheiten giebt, muss vorläufig dahin gestellt bleiben. — Zunächst haben wir es mit den sogenannten „Axiomen der Physik" zu thun und die Frage zu beantworten, auf welche Weise man zur Aufstellung derselben gekommen ist, und mit welchem Rechte man sie für richtig hält.

Dieselben lassen sich nach „Wundt, Die physikalischen Axiome und ihre Beziehung zum Kausalprinzip" in folgender Weise formulieren: 1, Alle Ursachen in der Natur sind Bewegungsursachen. 2, Jede Bewegungsursache liegt ausserhalb des Bewegten. 3, Alle Bewegungsursachen wirken in der Richtung der geraden Verbindungslinie ihres Ausgangs- und Angriffspunktes. 4, Die Wirkung jeder Ursache verharrt. 5, Jeder Wirkung entspricht eine ihr gleiche Gegenwirkung. 6, Jede Wirkung ist äquivalent ihrer Ursache.

Diese „Axiome" sind unter beständigem Drucke der Erfahrung aufgefunden und nach Ueberwindung mannigfacher Schwierigkeiten erst von einer sehr geläuterten Forschung festgestellt worden. Dieselben erscheinen daher zunächst als die umfassendsten Abstraktionen aus der Erfahrung. Es entsteht jetzt die Frage, ob die physikalischen „Axiome", wie die der Geometrie, eine unmittelbare anschauliche Gewissheit besitzen. Diese Frage ist entschieden zu verneinen. Denn die Vorstellung des Gegenteiles dieser Axiome bietet nicht nur keine Schwierigkeit, sondern sie ist sogar im allgemeinen leichter zu leisten, als die des Inhaltes der einzelnen Axiome selbst. Auch lehrt die Geschichte der Wissenschaft, dass manche dieser Axiome erst sehr spät zur Geltung gekommen sind, nachdem lange Zeit das Gegenteil allgemein, zum Teil sogar als selbstverständlich (evident) angenommen war; und dies Zeugnis der Geschichte zeigt, dass die entsprechenden Axiome einer unmittelbaren Anschauung wenigstens sogar zuwider laufen. Hieraus geht hervor, dass diese Axiome der Physik nicht zu unseren unmittelbaren Wahrheiten, d. h. auch nicht zu den Axiomen in dem festgesetzten Sinne dieses Wortes gehören. Um einer Verwechselung vorzubeugen, ist es daher wünschenswert, dieselben etwa als „Grundhypothesen" der Physik zu bezeichnen, was in der Folge auch geschehen soll.

Wenn es hiernach nun auch feststeht, dass diese Grundhypothesen durch die Erfahrung gefunden sind und damit ein Recht haben als wahr angesehen zu werden, so ist deshalb noch nicht die Möglichkeit einer Deduktion a priori ausgeschlossen. Dass sie nicht unmittelbar anschaulich sind, war bereits gesagt; es ist aber noch möglich, dass sie mittelbar anschaulich sind, dass man nach Vollziehung einer Reihe von Denkhandlungen die Einsicht in ihre Notwendigkeit, jetzt, nach dieser Vollziehung, unmittelbar — wie am Schluss des Beweises irgend eines Lehrsatzes — erhält; und in der That ist dies letztere bei ihnen allen der Fall. Es gehört aber weder ihre Abstrahierung aus der Erfahrung, noch diese nachträgliche Deduktion zu unserem Thema, da einerseits die zur Auffindung synthetischer Sätze a posteriori erforderlichen Denkformen überhaupt ausgeschlossen, und andererseits diese Grundhypothesen keine unmittelbaren Wahrheiten sind. Deshalb soll nur die Art dieser Deduktion jetzt noch kurz angedeutet werden.

Diejenige Voraussetzung, welche die Physik notwendig machen muss, um sich nicht selber aufzuheben, ist die, dass in dem Geschehen (der Natur) gesetzliche Ordnung herrscht, oder kurz: dass das

Kausalgesetz (in der Natur) gilt. Auf das Kausalgesetz und seine Verwendung als Regulativ der Forschung (Satz vom zureichenden Grunde) (insbesondere auf den Sinn des Ausdruckes „zureichend“) näher einzugehen, würde hier zu weit führen. Es sei nur bemerkt, dass die Untersuchung über dasselbe zu dem Resultate führt (Wundt, a. a. O.): Wenn es überhaupt eine apriorische Deduktion der physikalischen Grundhypothesen giebt, so muss das Kausalgesetz den Untersatz des Schlussverfahrens repräsentieren, dessen Ergebnis die einzelne Grundhypothese ist; der zugehörige Obersatz aber muss einen besonderen zu dem Inhalte der entsprechenden Grundhypothese in direkter, materialer Beziehung stehenden Inhalt besitzen. Es handelt sich noch darum, die Art dieses Inhaltes festzustellen. Hierzu führt uns die Bemerkung, dass in jeder unserer Grundhypothesen die Anwendung des Kausalgesetzes auf ein Geschehen (Ortsveränderung) enthalten ist, das wir im Raume (und der Zeit) anschauen können. Die allgemeine apriorische Bedingung mithin, der sämtliche physikalische Grundhypothesen ausser dem Kausalgesetz zu genügen haben, ist die, dass sie unserer Anschauung (von Raum und Zeit) konform sein oder entsprechen müssen. Eine weitere apriorische Bedingung giebt es nicht. Da nun der Untersatz der zu leistenden apriorischen Deduktion das Kausalgesetz enthielt, so wird der Obersatz gerade jene Konformität mit unserer Anschauung enthalten müssen. Endlich liefert zur Deduktion der Grundhypothesen die Betrachtung des Kausalgesetzes die Regel, dass wir aus unserer Anschauung sämtliche Vorstellungen, die räumliche des Zuschauers oder der eigenen Person mit eingeschlossen, zu entfernen haben mit Ausnahme derjenigen, auf welche sich die einzelne Grundhypothese bezieht. (Herstellung des reinen oder einfachen Falles).

Die physikalischen Grundhypothesen bilden mit Ausnahme der ersten die Grundlage des allgemeinen Teiles der Physik, nämlich der Mechanik.

Die Mechanik selbst pflegt man in zwei Teile zu spalten, die Phoronomie und die „Kräftelehre“. Die erste beginnt mit der Definition der Bewegung und handelt dann von der Bewegung eines Punktes ohne Rücksicht auf Materie und Ursache der Bewegung. Im übrigen stützt sie sich auf die Mathematik. Den ursprünglichen fügt man leicht neue Begriffe hinzu, indem man insbesondere — kurz gesagt — Geschwindigkeit als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit, Beschleunigung der Bewegung als den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit definiert und durch Fortsetzung dieses Verfahrens Beschleunigungen höherer Ordnung begrifflich festsetzt. Statt eines beweglichen Punktes wird ferner ein System von Punkten zum Gegenstand der Betrachtung gemacht. Eine weitere Verallgemeinerung wird herbeigeführt dadurch, dass man sich einzelne Punkte eines Systems mehrfach denkt (Beschleunigungs-Koefficient) u. s. f.

Der zweite Teil oder die „Kräftelehre“ würde die Anwendung der Phoronomie (theoretischen Mechanik) auf die wirklichen Ereignisse der physischen Welt sein, d. h. auf die Bewegung der physischen Körper (Materie), die man als Träger von Kräften anzusehen hat. Dieser zweite Teil, im Gegensatz zur theoretischen Mechanik, ist es, der auf jenen Grundhypothesen beruht. Hier entsteht die Frage, ob eine Berechtigung vorhanden ist, die Resultate der Phoronomie auf die Ereignisse der Natur anzuwenden. Die ganze Mechanik aber — und dies ist die Beantwortung jener Frage — ist unter unablässigem Drucke der Erfahrung entstanden, eben weil sie auf jenen der letzteren (der Erfahrung) mühsam abgerungenen Grundhypothesen beruht; die Phoronomie im besonderen hat nur die durch die Erfahrung aufgedrungenen Begriffe mathematisch aufgefasst und damit idealisiert. Die „Kräftelehre“ würde die Physik selbst sein, wenn in ihr die Erscheinungen (Begebenheiten) der einzelnen physikalischen Gebiete genau

definiert und aus jeder solchen Definition mit Zuziehung (des ersten Teiles) der Mechanik (und der Mathematik) ihre Folgen abgeleitet wären. Man pflegt aber die Mechanik von ihren Anwendungen (Physik) zu sondern und als ein abgeschlossenes Ganze denselben gegenüberzustellen; man behandelt daher in der Kräftelehre nur einige wichtigere und allgemeinere Fragen der mathematischen Physik, um zu zeigen, wie die Rechnung einzufädeln ist; eine prinzipielle und vollständige Erörterung dieser Gegenstände überlässt man dagegen den einzelnen Teilen der mathematischen Physik selbst.

Es war bisher die Rede von der Mechanik als dem allgemeinen Teile der Physik; es bleibt noch der besondere Teil der letzteren übrig. Dieser sei fortan schlechtweg als Physik, der erste im Gegensatz zu ihr als Mechanik bezeichnet. Es war nun oben gesagt, dass die Mechanik (Phoronomie und Kräftelehre) unter anderem auf den physikalischen Grundhypothesen mit Ausnahme der ersten beruhe; dies ist erklärlich, da diese erste Grundhypothese ausspricht, dass die Physik eine angewandte Mechanik sei. Der Gegenstand ferner, auf welchen die letztere angewandt werden soll, sind die einzelnen Erscheinungen (Ereignisse) in der Natur. Diese aber müssen noch genau begrifflich aufgefasst werden, ehe die Mechanik auf sie angewandt werden kann. Aus den unendlich vielen Erscheinungen der Natur gelingt es dem (beobachtenden) menschlichen Geiste, verschiedene Gruppen einander ähnlicher Erscheinungen herauszufinden und zwar zunächst nach Massgabe der Verschiedenheit der Sinne, durch welche er die einzelnen Erscheinungen wahrnimmt. So zerfällt die Physik, wenn wir von der Physiologie und weiter von der Chemie absehen, in verschiedene Lehren von Schall, Wärme, Licht, Elektricität u. s. w., welche zunächst im allgemeinen jede ein innerlich abgeschlossenes Ganze repräsentieren, während im einzelnen Erscheinungen des einen Gebietes in ein anderes hinüberspielen (z. B. Lichteffekte bei elektrischen Erscheinungen). Die Erscheinungen dieser einzelnen Gebiete müssen also zuerst sämtlich definiert werden; dieses aber erfordert die Feststellung der Qualität und Quantität der zwischen zwei bestimmten Elementen stattfindenden Wirkung. So ist die Definition der elektrischen Erscheinungen (soweit sie die Elektrostatik angehen) in Folgendem gegeben:

„Es giebt zwei Arten elektrischer Massen, die positive (+) und negative (—)".

„Zwei (in Punkten koncentriert gedachte) elektrische Massen ziehen sich an oder stossen sich ab, je nachdem sie entgegengesetzt (verschiedener) oder gleichbezeichnet (gleicher Art) sind."

„Die Stärke der Anziehungs- oder Abstossungskraft ist proportional direkt den beiden Massen, umgekehrt dem Quadrate ihrer Entfernung."

In ähnlicher Weise sind auch die anderen Gruppen von Erscheinungen erst sämtlich zu definieren. Ob mit dem qualitativen Teil der Definitionen das Wesentliche der Erscheinungen getroffen ist oder nicht, mit anderen Worten: ob man diesen Teil als provisorisch oder für immer fertig anzusehen hat einerseits; und was andererseits den quantitativen Teil betrifft, wie man aus Messungen (kurz gesagt) das Naturgesetz abstrahiert, und mit welchem Recht man dem Resultat dieser Abstraktion objektive Gültigkeit beimisst, das kommt hier nicht in Betracht.

Nachdem jedes einzelne Gebiet von Erscheinungen vollständig definiert ist, kann die Mathematik und Mechanik auf diese Definition angewandt und somit das ganze Gebiet deduktiv entwickelt werden. Der Grund der Anwendbarkeit dieser Wissenschaften ist hauptsächlich in dem quantitativen Teil der Definition enthalten; denn dieser liefert die Abhängigkeit (Funktionsbeziehung) der verschiedenen in Betracht kommenden Grössen von einander.

So ist jedes einzelne Gebiet der Physik (im engsten Sinne) deduktiv entwickelt. Die Physik selbst als Ganzes hat aber noch nicht in einheitlicher Weise deduktiv aufgebaut werden können, eine Thatsache, die darin ihre Erklärung findet, dass die physikalischen Definitionen die Erscheinungen naturgemäss in Beziehung auf die Arten unserer Fähigkeit wahrzunehmen (zu empfinden), nicht aber in ihrer objektiven Realität erfassen (das nämliche Ereignis, Ätherschwingungen, wird nach der Meinung der Physiker vom Auge als Licht, durch den Gefühlssinn als Wärme empfunden). Man ist indessen im allgemeinen zu der Ansicht geneigt, dass die Physik in nicht all zu ferner Zeit auch als Ganzes deduktiv werde entwickelt werden können.

Hiermit sind die an der Spitze der Deduktion für die einzelnen Disciplinen der mathematischen Physik stehenden (grammatischen) Sätze festgestellt; sie bestehen in der Mathematik, Mechanik (physikalischen Grundhypothesen) und jenen aus der Erfahrung entnommenen Definitionen der Naturerscheinungen.

